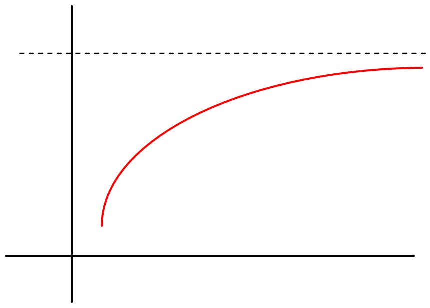
TEMA 1: LÍMITES DE FUNCIONES

1.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO X TIENDE A INFINITO: $\lim_{X\to\infty} f(x)$

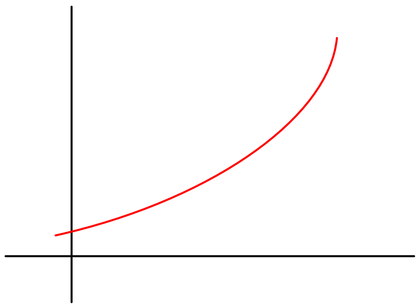
a) $\lim_{X\to\infty} f(x) = b$



Al aumentar x la función se aproxima a un cierto valor b:

$$\lim_{X\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon \in R \;\; \exists x_0 \in R \,/\, \forall x > x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

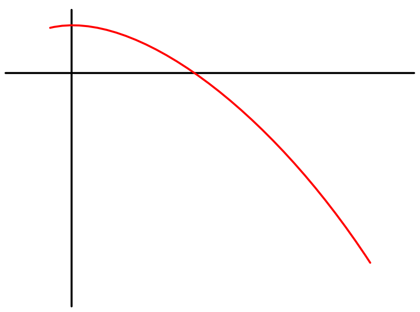
b) $\lim_{X\to\infty} f(x) = +\infty$



Al aumentar x la función se hace cada vez más grande que un valor M, todo lo grande que queramos:

$$\lim_{X\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in R \;\; \exists x_0 \in R \,/\, \forall x > x_0 \Rightarrow f(x) > M$$

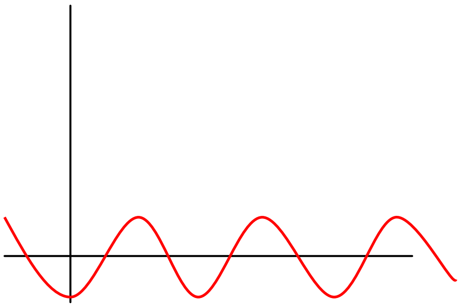
c) $\lim_{X\to\infty} f(x) = -\infty$



Al aumentar x la función se hace cada vez más pequeño que un valor N, tan negativo como queramos :

$$\lim_{X\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N \in R \;\; \exists x_0 \in R \,/\, \forall x > x_0 \Rightarrow f(x) < N$$

d) $\lim_{X\to\infty} f(x)$ *no existe*



La función tiene un comportamiento de tendencia variable

Ejemplo: Dada la función $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-2}$ *Comprobar a partir de qué valores Xo se cumple que* $|f(x) - 2| < \varepsilon$*, siendo*:

a) *ε=0,1*
b) *ε=0,0001*
c) *ε=0,01*
d) *ε=0,001*

Sabemos que $\lim_{X\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-2} = 2$. Tenemos que ver a partir de qué punto (Xo) nos acercamos más a dos que lo que nos marca el valor dado de *ε en cada caso.*

Hacemos una tabla de valores:

X	0	1	2	5	7	7,5	8	…	22	23	…	70	71
Y	-0,5	-3/1	9/2	51/23	99/47		129/62						
				2,21739	2,106	2,092	2,08		2,0103	2,0095		2,00102	2,000992
f(x) -2	-2,5	-5	2,5	0,21	0,106	0,092	0,08		0,0103	0,0095		0,00102	0,000992

Para ε=0,1 podemos tomar un valor de Xo=7,5, pues siempre que tomemos x>7,5, se cumplirá que $|f(x) - 2| < 0{,}1$.

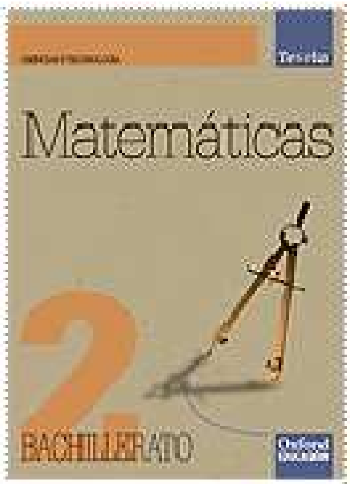
De la misma manera, podemos buscar dando valores a x unos valores de f(x) tan cercanos a 2 (el límite de la función cuando x tiende a + ∞) como queramos.

Cuanto menor sea el valor de ε nos tenemos que acercar más al límite (hay que dar valores de x mayores), de manera que la diferencia con el límite sea menor.

24 septiembre de 2009

TEXTO RECOMENDADO PARA BACHILLERATO

2º Bachillerato Matemáticas (Modalidad Ciencias y Tecnología). Proyecto Tesela (NUEVO)



Nivel:
2º Bachillerato

Autor/a Esther Bescós y Zoila Pena

Descripción
El Proyecto Tesela para 2º de Bachillerato de Matemáticas para la modalidad de ciencias y tecnología se articula en torno a Libros del alumno, CD-ROM y carpeta de recursos con CD para el profesor. Adaptado a las recientes modificaciones curriculares el proyecto combina modernos criterios didácticos y una atractiva presentación visual.

Principales caraterísticas

- Desarrollar habilidades, actitudes y técnicas matemáticas que les servirán como herramientas básicas tanto para posteriores estudios como para la vida profesional.

2.- OPERACIONES CON LÍMITES FINITOS

Si $\lim_{X\to\infty} f(x) = m$ y $\lim_{X\to\infty} g(x) = n$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) + \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = m+n$ *El límite de una suma de funciones es igual a la suma de los respectivos límites de cada una de ellas.*

Podemos descomponer una suma en sus sumandos para calcular de manera más fácil el límite de la suma.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) - \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = m-n$

ESCRIBE TÚ LA REGLA DEL LÍMITE DE UNA DIFERENCIA: El límite de una diferencia de funciones es igual a la diferencia de los respectivos límites de cada una de ellas.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = m\cdot n$

ESCRIBE TÚ LA REGLA DEL LÍMITE DE UN PRODUCTO: El límite de un producto de funciones es igual al producto de los respectivos límites de cada una de ellas.

d) $Si\ n \neq 0, \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)} = \frac{m}{n}$

ESCRIBE TÚ LA REGLA DEL LÍMITE DE UN COCIENTE: El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los respectivos límites de cada una de ellas, cuando el denominador no sea cero.

e) $Si\ f(x) > 0, \lim_{x\to\infty} (f(x)^{g(x)}) = [\lim_{X\to\infty} f(x)]^{\lim_{X\to\infty} g(x)} = m^n$

ESCRIBE TÚ LA REGLA DEL LÍMITE DE UNA POTENCIA: El límite de una potencia de funciones es igual a la potencia de los respectivos límites de cada una de ellas, cuando la base sea positiva (en otro caso no está definida la potencia).

f) $Si\ p\ es\ impar\ o\ si\ p\ es\ par, siendo\ f(x) \geq 0, \lim_{x\to\infty} \sqrt[p]{f(x)} = \sqrt[p]{\lim_{x\to\infty} f(x)} = \sqrt[p]{m}$

ESCRIBE TÚ LA REGLA DEL LÍMITE DE UNA RAIZ: El límite de la raíz p-ésima de una función es igual a la raíz p-ésima del límite de la función. Se ha de cumplir como condición que la raíz sea de iíndice impar o bien que la función no sea negativa (si el índice fuera par)

g) $Si\ p > 0\ \ siendo\ f(x) > 0, \lim_{x\to\infty} [\log_P f(x)] = \log_p \left[\lim_{x\to\infty} f(x)\right] = \log_p[m]$

ESCRIBE TÚ LA REGLA DEL LÍMITE DE UN LOGARITMO:
El límite del logaritmo de una función es igual al logaritmo del límite de la función, siendo la base positiva y la función también (condición de existencia del logaritmo).

Ejercicios propuestos:
1º.- Si f(x) $\longrightarrow$ 5, g(x) $\longrightarrow$ -2 y h(x) $\longrightarrow$ 4, cuando x $\longrightarrow$ + ∞, calcula el límite cuando
x $\longrightarrow$ + ∞ de :

a) f(x) + g(x)	*e) $[f(x)]^{g(x)}$*
b) g(x) – h(x)	*f) $[g(x)]^{h(x)}$*
c) h(x) / f(x)	*g) $\sqrt[3]{h(x)}$*
d) f(x)·g(x)·h(x)	*h) $\sqrt[4]{g(x)}$*

i) Escribe tres límites no posibles o no conocidos con estas funciones.

Soluciones:

a) 3 b) -6 c) 4/5 d) -40 e)1/25 f) ∄ g) $\sqrt[3]{4}$ h) ∄

i) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)+2g(x)}$; $\lim_{x\to a} h(x)\ \ (a \in R)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3.- ALGUNOS LÍMITES INFINITOS

Hay varias familias de funciones que se hacen infinitas cuando x $\longrightarrow \infty$:

POTENCIAS: Si m>0 $\lim_{x\to+\infty} p\cdot x^m = \pm\infty \quad (\forall p \in R)$

EXPONENCIALES: Si a>1 $\lim_{x\to+\infty} p\cdot a^x = \pm\infty \quad (\forall p \in R)$

LOGARÍTMICAS: Si a>1 $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} p\cdot \log_a x} = \pm\infty \quad (\forall p \in R)$

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to+\infty}(2x^3 - 4x + 7) = +\infty$
b) $\lim_{x\to+\infty}(-5x^2 + 8x - 4) = -\infty$
c) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt[6]{x^2} + 8) = +\infty$
d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{4 - 2x^3}\right) = No\ pertenece\ a\ R$

EJERCICIOS:

Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 6x - 17) = +\infty$
b) $\lim_{x\to+\infty}(-5\cdot 2^x + 8x - 4) = -\infty$
c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{4x^4 - 2x^3}\right) = +\infty$
d) $\lim_{x\to+\infty}\log_{10}(x^2 - 2x) = +\infty$
e) $\lim_{x\to+\infty}\log_e\left(2x^2 - 2\sqrt[3]{x^{10}}\right) = \notin R$

VIERNES 25-09-2009

4.- OPERACIONES CON INFINITOS. RESUMEN:

Sumas:

a) $+\infty + \infty = +\infty$
b) $+\infty \pm$ k= $+\infty$ $(\forall k \in R)$
a) K - ∞= $-\infty$
b) - ∞ - ∞ = - ∞
c) –(- ∞) = + ∞

Productos INCORPORAR RESUMEN DE FOTOCOPIA O DE CLASE

Cocientes INCORPORAR RESUMEN DE FOTOCOPIA O DE CLASE

Potencias INCORPORAR RESUMEN DE FOTOCOPIA O DE CLASE

5.- INDETERMINACIONES

Hay 7 expresiones diferentes que, a priori, no sabemos cuál puede ser el resultado final: $\frac{\infty}{\infty};\ \infty - \infty;\ 0 \cdot \infty;\ \frac{0}{0};\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty$

Repasaremos, con ejemplos, los métodos para resolver cada una de las que se exigen en este nivel.

Acudiremos, siempre que sea posible, a la comparación de grados para simplificar el cálculo.

2. Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$

f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

Hemos resuelto los apartados a) Sol= - ∞ y f) Sol=0

Se han propuesto para resolver en clase el lunes los siguientes: 2 b y 2e, así como los 3 a y 3e. Resolveremos, además, el 3f.

3. Halla los siguientes límites cuando $x \to +\infty$:

a) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^x$ b) $\left(5 + \frac{1}{5x}\right)^{5x}$ c) $\left(1 + \frac{1}{5x}\right)^5$

d) $\left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$ e) $\left(5 + \frac{5}{x}\right)^{5x}$ f) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}$

4. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7}$ b) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

5. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}$ b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

6. Calcula: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

7. Sabiendo que, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:

a) $f(x) - h(x)$ b) $f(x)^{f(x)}$ c) $f(x) + h(x)$

d) $f(x)^x$ e) $f(x) \cdot h(x)$ f) $u(x)^{u(x)}$

g) $f(x)/h(x)$ h) $[-h(x)]^{h(x)}$ i) $g(x)^{h(x)}$

j) $u(x)/h(x)$ k) $f(x)/u(x)$ l) $h(x)/u(x)$

m) $g(x)/u(x)$ n) $x + f(x)$ ñ) $f(x)^{h(x)}$

o) $x + h(x)$ p) $h(x)^{h(x)}$ q) x^{-x}

8. Las funciones f, g, h y u son las del ejercicio propuesto 7 anterior. Di cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones. En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo, y, si no lo es, di cuál es el límite:

a) $f(x) + h(x)$ b) $f(x)/h(x)$ c) $f(x)^{-h(x)}$ d) $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ f) $u(x)^{h(x)}$ g) $[g(x)/4]^{f(x)}$ h) $g(x)^{f(x)}$

LUNES 28-09-2009

Se han resuelto los siguientes: 2 b y 2e, así como los 3 a y 3e.

$$\text{b)}\ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2+2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{4x^2+2} = 0$$

$$\text{e)}\ \lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{x^2+x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+x}\right)}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

También se han resuelto los del ejercicio 3: 3 A, 3b, 3e y 3f

$$\text{a)}\ \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x} \right)^{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{5x} \right)^{5x} \right]^{1/5} = e^{1/5}$$

$$\text{b)}\ \lim_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{1}{5x} \right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$$

$$\text{c)}\ \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{5x} \right)^{5} = 1^5 = 1$$

$$\text{d)}\ \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x/5} \right)^{x/5} \right]^{5} = e^5$$

$$\text{e)}\ \lim_{x \to +\infty} \left(5 + \frac{5}{x} \right)^{5x} = 5^{+\infty} = +\infty$$

Hemos resuelto el 4 A y se ha propuesto el 4b.

$$\text{a) } \lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x + 5}{x^2 - 6x - 7} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x^2 - 3x + 5)}{(x+1)(x-7)} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 7} = \frac{9}{-8} = \frac{-9}{8}$$

$$\text{b) } \lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

Hemos resuelto el 5 A (que hay que acabarlo en casa) y hay que resolver el 5b.

$$\text{a) } \lim_{x \to -3} \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}} = \lim_{x \to -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3 (x+3)^3}{x^4 (x+3)^2}} = \lim_{x \to -3} \sqrt[6]{\frac{(x-1)^3 (x+3)}{x^4}} = 0$$

También hemos propuesto para entregar por escrito el próximo viernes, día 2 de octubre, los ejercicios 7 y 8.

MARTES 29 DE SEPTIEMBRE (09-09-29)

PRIMERO RESOLVEMOS LOS EJERCICIOS PENDIENTES DE AYER:

4B. NO ES INDETERMINACIÓN

$$\text{b) } \lim_{x \to 4} \frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

5B.

$$\text{b) } \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[4]{x^3 - x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}} = \lim_{x \to 1} \sqrt[4]{\frac{x(x-1)(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)^2}} = \lim_{x \to 1} \sqrt[4]{\frac{x(x+1)}{(x+2)^2 (x-1)}} \to$$

$$\to \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) \text{ no existe} \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$$

6. Calcula: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2 - 5x + 2}{x(x+2)} - \frac{x^3 + 2x + 1}{x(x^2 + 1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 5x + 2) - (x + 2)(x^3 + 2x + 1)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x^2 - 5x + 2 - x^4 - 2x^2 - x - 2x^3 - 4x - 2}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^3 + x^2 - 10x}{x(x+2)(x^2+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(-7x^2 + x - 10)}{x(x+2)(x^2+1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-7x^2 + x - 10}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{-10}{2 \cdot 1} = -5$$

Tomamos nuestro texto y resolvemos los ejercicios que hay en la página 173 (nºs 10, 12, 13, 14 y 16)

10.- $\lim_{x\to\infty}[\ln(3x^2+1)-\ln(x^2+7)] = \lim_{x\to\infty}\left[\ln\frac{(3x^2+1)}{(x^2+7)}\right] = \ln\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(3x^2+1)}{(x^2+7)}\right] = ln3$

12.- $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^x}{x^2+2}\right]=\frac{\infty}{\infty} = (por\ comparación\ de\ infinitos\ e^x \gg x^2) = \infty$

13.- $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{lnx}{3x-1}\right]=\frac{\infty}{\infty} = (por\ comparación\ de\ infinitos\ lnx \ll x^2) = 0$

14.- $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2^x+x}{e^x}\right]=\frac{\infty}{\infty} = (por\ comparación\ de\ infinitos\ 2^x \ll e^x) = 0$

15.- Averiguar qué valor debe tener el parámetro “a”para que se cumpla la siguiente igualdad: $\lim_{x\to\infty}\left[3x-\sqrt{9x^2-2ax+1}\right] = 1$

Intentamos resolver el límite y, al final, lo hacemos igual a 1, para que podamos obtener una ecuación en función del parámetro “a”

$$\lim_{x\to\infty}\left[3x-\sqrt{9x^2-2ax+1}\right] = \infty-\infty$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left[3x-\sqrt{9x^2-2ax+1}\right]\left[3x+\sqrt{9x^2-2ax+1}\right]}{\left[3x+\sqrt{9x^2-2ax+1}\right]}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{[9x^2-(9x^2-2ax+1)]}{\left[3x+\sqrt{9x^2-2ax+1}\right]} = \lim_{x\to\infty}\frac{2ax-1}{3x+\sqrt{9x^2-2ax+1}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$= \ (dividiendo\ todos\ los\ términos\ entre\ \mathrm{x}, máximo\ grado\ de\ la\ variable)$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2a-\frac{1}{x}}{3+\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{2ax}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}$= (haciendo el paso al límite, quedaría) =$\frac{2a}{3+\sqrt{9}} = \frac{2a}{6}$

Si igualamos la fracción resultante a la unidad, como plateaba el problema, tendremos inmediatamente que el parámetro a=3

EJERCICIOS PARA EL JUEVES:

PAG 175 DEL LIBRO NUESTRO, Nº 14 B, C, H, I, K

14.- Resuelve cada uno de los límites siguientes por el método que te resulte más razonable:

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}-(x-2)}{x-2} = \frac{\infty-\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}-\frac{(x-2)}{x-2}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-2}\right] - \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-2)}{x-2}\right] =$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}\right]-1 = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{1-\frac{2}{x}}\right]-1 = 1-1 = 0$$

c) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+1}{5x^2-2}\right)^{\frac{x-1}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\infty}=\left(\frac{5}{3}\right)^{+\infty} = +\infty$

h) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3$

i) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{2}}{x^2+x-2} = \frac{0-\sqrt{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

k) $\lim_{x\to {}^1/_2}\frac{\ln(4x-1)}{2x-1} = \frac{\ln(4\frac{1}{2}-1)}{2\frac{1}{2}-1} = \frac{\ln(2-1)}{1-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to {}^1/_2}\left[\frac{1}{2x-1}\cdot\ln(4x-1)\right] = \lim_{x\to {}^1/_2} ln[4x-1]^{\frac{1}{2x-1}} =$

$$ln\lim_{x\to {}^1/_2}[4x-1]^{\frac{1}{2x-1}} = \ln(1)^{\infty} = ln\lim_{x\to {}^1/_2}[1+4x-1-1]^{\frac{1}{2x-1}}$$

$$= ln\lim_{x\to {}^1/_2}\left[1+\frac{1}{\frac{1}{4x-2}}\right]^{\frac{1}{4x-2}\cdot\frac{4x-2}{1}\cdot\frac{1}{2x-1}} =$$

$ln e^{\lim_{x\to {}^1/_2}\frac{4x-2}{1}\cdot\frac{1}{2x-1}} = ln e^{\lim_{x\to {}^1/_2}\frac{2(2x-1)}{2x-1}} = ln(e^2)$=2lne=2

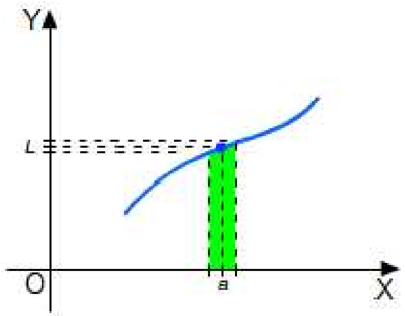
JUEVES 01-10-2009

LÍMITES DE FUNCIONES EN UN PUNTO. ASÍNTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

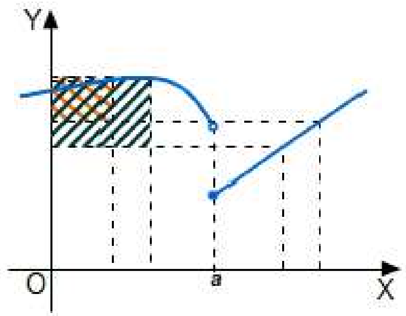
Límite de una función en un punto

Un número real, L, es el límite de una función f, en el punto a si al tomar valores de x suficientemente próximos a a, sus imágenes, $f(x)$, están tan próximas a L como se desee. Se designa por $\lim_{x\to a} f(x) = L$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |(fx) - L| < \varepsilon$$



No importa lo pequeño que sea el entorno de a porque las imágenes del entorno siempre formarán un entorno de L.



Para entornos pequeños de a, las imágenes del entorno no forman un entorno a ningún punto. Por lo tanto no existe el límite de a.

LÍMITES LATERALES

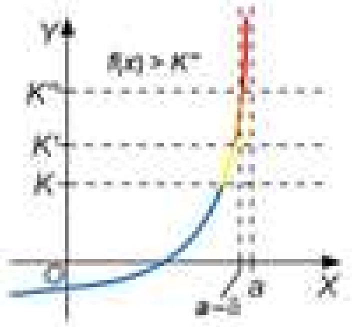
Límite lateral por la izquierda: cuando se cumple la definición de límite pero solo para puntos tales que $x < a$.

Límite lateral por la derecha: cuando se cumple la definición de límite pero solo para puntos tales que $x > a$.

Límite infinito en un punto. Asíntotas verticales

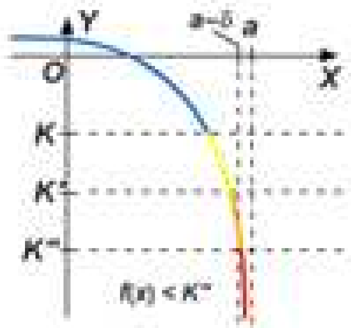
Se dice que ***f* tiende a +∞ cuando *x* tiende a *a* por la izquierda** si fijado un número real positivo *K*, tan grande como queramos,

$$\exists \delta / x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) > K$$



Se dice que ***f* tiende a – ∞ cuando *x* tiende a *a* por la izquierda** si fijado un número real negativo *K*, cuyo valor absoluto es tan grande como queramos,

$$\exists \delta / x \in (a-\delta, a) \Rightarrow f(x) < K$$



De modo análogo se definen los límites por la derecha.

Se dice que ***f* tiende a +∞ cuando *x* tiende a *a* por la derecha** cuando fijado un número real positivo *K*, tan grande como queramos,

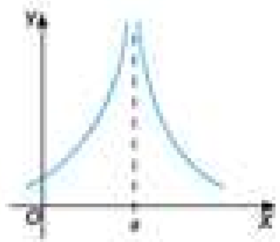
$$\exists \delta / x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > K$$

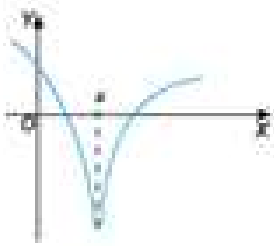
Se dice que ***f* tiende a – ∞ cuando *x* tiende a *a* por la derecha** cuando fijado un número real negativo *K*, cuyo valor absoluto es tan grande como queramos.

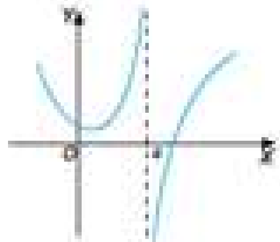
$$\exists \delta / x \in (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < K$$

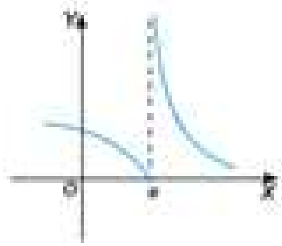
Cuando los límites coinciden el límite de la función es +∞ o – ∞ según corresponda.

Cuando uno de los límites laterales en el punto , es +∞ o –∞ , la función tiene una **asíntota vertical** en *x* = *a*. Los siguientes ejemplos son muestra de ello:



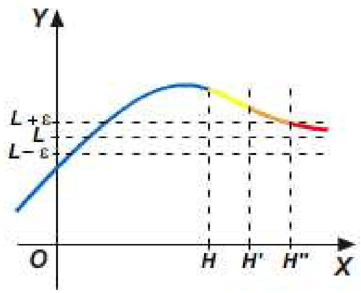




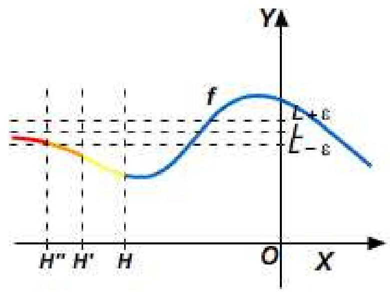


Límite de una función en el infinito. /

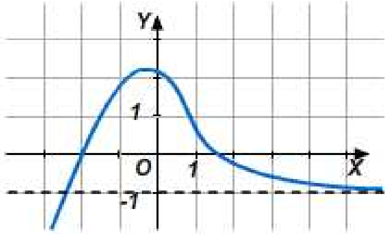
Se dice que el **límite de una función *f* cuando *x* tiende a** $+\infty$ es L si: $\forall \varepsilon > 0, \exists H \in \mathbb{R} \,/\, \text{si } x > H \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

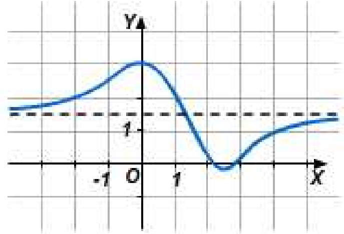


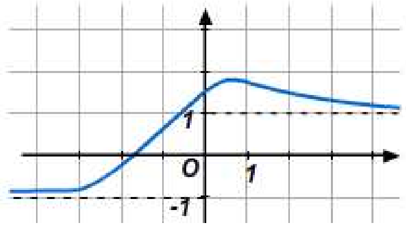
Se dice que el **límite de una función *f* cuando *x* tiende a** $-\infty$ es L si: $\forall \varepsilon > 0, \exists H \in \mathbb{R} \,/\, \text{si } x < H \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$



Cuando el límite de f cuando x tiende a $+\infty$ o $-\infty$ es un número real finito L, la recta $y = L$ es una asíntota horizontal.
Puede haber más de una asíntota horizontal en una función. Aquí puedes ver algunos ejemplos de **asíntotas horizontales**:





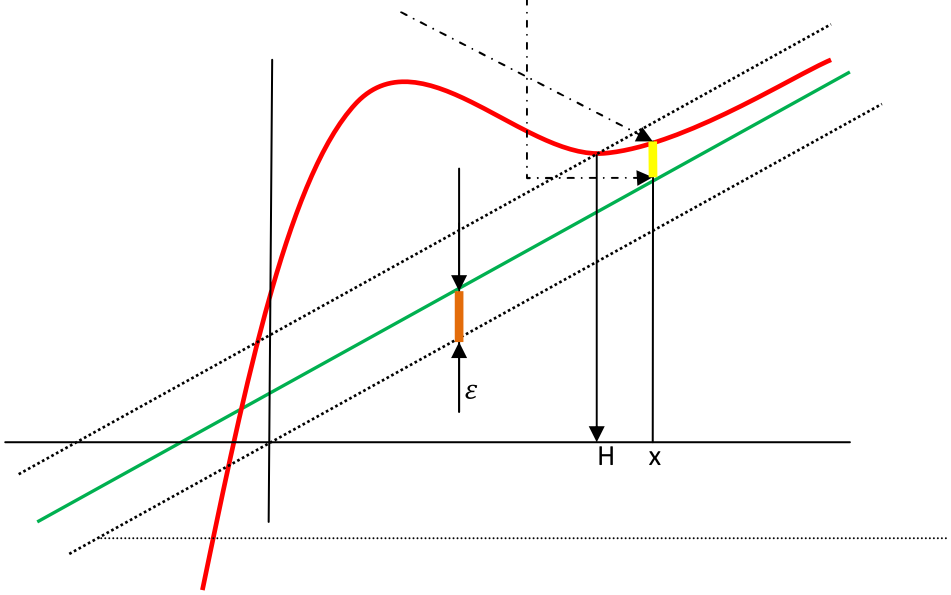


VIERNES 02-10-2009

ASÍNTOTAS OBLICUAS

Se dice que una función y=f(x) tiende a la asíntota oblicua y=mx+n cuando x tiende a +∞ si

$\forall \varepsilon \in R^{+} \exists H \in R / \forall x > H \Rightarrow |f(x) - (mx + n)| < \varepsilon$



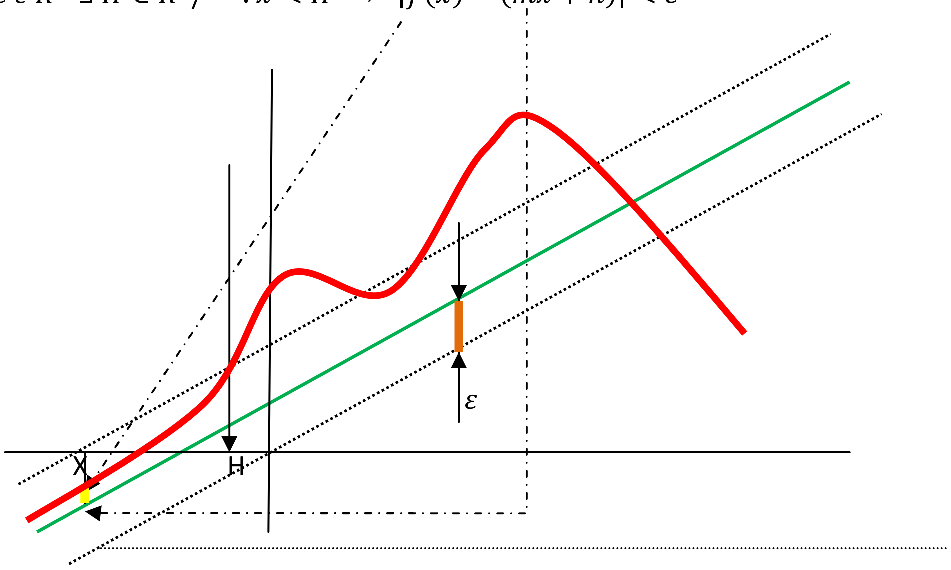
Línea verde: y= mx + n, asíntota oblicua cuando x tiende a +∞.

TAREA PARA MAÑANA:

- Entregar los ejercicios escritos del martes.
- Estudiar teoría.
- Expresar y dibujar la asíntota oblicua cuando x tiende a - ∞.

Se dice que una función y=f(x) tiende a la asíntota oblicua y=mx+n cuando x tiende a - ∞ si

$\forall \varepsilon \epsilon R^{+} \, \exists H \in R \; / \quad \forall x < H \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - (mx + n)| < \varepsilon$



Línea verde: y= mx + n, asíntota oblicua cuando x tiende a - ∞.

Para calcular las asíntotas oblicuas resolveremos los siguientes límites:

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(mx + n)$ (pues coinciden en el infinito), podemos dividir en ambos miembros por x, introduciéndolos en el límite, y tendremos: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(\frac{mx+n}{x})$. Si separamos la fracción del 2º miembro en sus 2 términos, tendremos entonces que: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(\frac{mx}{x} + \frac{n}{x})$. Como la fracción n/x tiende a 0 cuando x tiende a infinito, quedará que: $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(\frac{mx}{x})$ y, simplificando quedará que $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. Una vez calculado m mediante este límite, el valor de n (ordenada en el origen) lo obtenemos sin más que despejarlo de la expresión $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(mx + n)$. Aplicando las propiedades de los límites y teniendo en cuenta que n es un número real:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(mx) + \lim_{x\to\infty} n = \lim_{x\to\infty}(mx) + n$$

Así:

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - \lim_{x\to\infty}(mx) = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$$

El cálculo de las asíntotas oblicuas habrá que hacerlo, según qué casos, tanto para +∞ como para - ∞.

Resumiendo: Asíntotas oblicuas: y= mx +n donde: $m = \lim_{x\to\infty}(f(x)/x)$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$

Diremos que existen tales asíntotas si tanto m como n resultan ser valores reales (siendo m no nulo).

Es importante tener en cuenta, tanto en las asíntotas horizontales como en las oblicuas, saber cómo se aproxima la curva a cada asíntota, si por encima o por debajo de la recta.

Para ello, estudiaremos el signo del límite de la diferencia entre la curva y la ecuación de la asíntota.

Ejemplos:

Estudiar las asíntotas de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \frac{4+x-x^2}{x}$
   a) Asíntotas verticales. En ellas f(x)=±∞. Por tanto, en este caso de cociente de polinomios, el denominador se debe hacer cero (polos de la función)

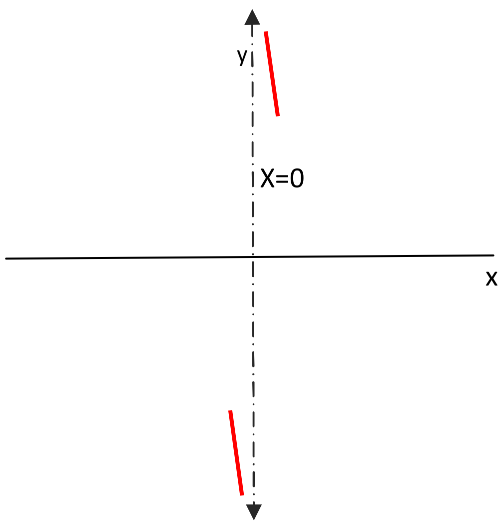
   Debemos igualar el denominador a 0 para calcular los polos. Así, en x=0 la función se hará ∞. Estudiamos los límites laterales en ese valor de x para ver por qué lado de la asíntota se aproxima la curva en cada caso:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{4+x-x^2}{x} = \frac{4+0^- - (0^-)^2}{0^-} = -\infty$$

   Y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4+x-x^2}{x} = \frac{4+0^+ - (0^+)^2}{0^+} = +\infty$$

   Por tanto, en la gráfica de nuestra función, hasta ahora, sabemos que junto a la asíntota vertical, de ecuación x=0 (coincide con el eje de ordenadas), la curva hará lo que podemos ver en la figura:



b) Asíntotas horizontales: Estudiamos el comportamiento de la función cuando x tiende a ±∞:

$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4+x-x^2}{x} = \mp\infty$ (los infinitos del numerador y denominador son de distinto signo).

No hay, por tanto, asíntotas horizontales.

c) Asíntotas oblicuas: Son de la forma y= mx +n donde: $m = \lim_{x\to\infty}(f(x)/x)$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$

Calculamos primero la pendiente "m":

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4+x-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+x-x^2}{x^2} = -1$ m es un nº real. Por tanto, en principio, hay asíntota oblicua.

Al ser los términos de mayor grado (x2) de grado par, el signo del resultado no cambia cuando hagamos el límite con - ∞, por tanto habrá una única pendiente para la asíntota oblicua.

Hallamos ahora el valor de n: $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4+x-x^2}{x} - (-1)x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4+x-x^2}{x} + x\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4+x-x^2\ +x^2}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4+x}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{4}{x} + 1\right] = 1$$

El valor de n tampoco depende, en este caso, del signo de infinito. El único término afectado es 4/x, que tiende a 0 cuando x se aleja hacia el infinito.

La asíntota oblicua tiene de ecuación **y= -x+1**

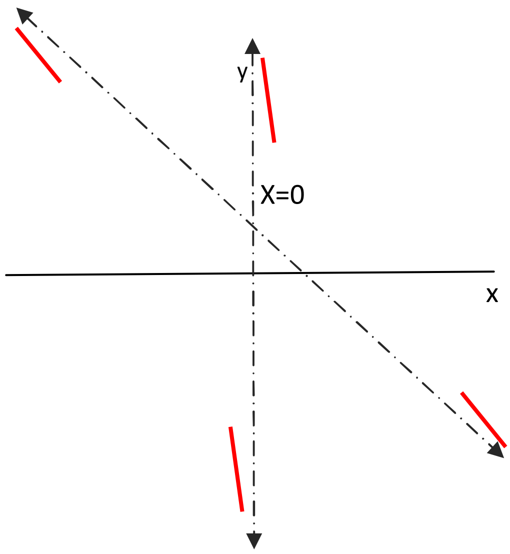
Por tanto, podríamos trazar ya la asíntota oblicua para estudiar el comportamiento de la curva cuando los valores reales de la variable independiente se hacen cada vez más lejanos. Antes, para ver si la curva está por encima o por debajo de la asíntota oblicua cuando nos vamos hacia el infinito, estudiamos el signo de la diferencia entre la curva y la asíntota, en el límite:

Hacemos por tanto:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - (mx+n)) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4+x-x^2}{x} - (-x+1)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4+x-x^2\ +x^2-x}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4}{x}\right) = \begin{cases} \text{cuando } x\to+\infty\text{:} \quad \frac{4}{+\infty} = 0^+ \\ \text{cuando } x\to-\infty\text{:} \quad \frac{4}{-\infty} = 0^- \end{cases}$$

Por tanto, cuando x tienda a $+\infty$ la curva estará por encima de la asíntota y al contrario cuando tiende a $-\infty$. Así, tendremos finalmente el siguiente aspecto de nuestra curva, con sus asíntotas, lo cual nos ayudará mucho en su representación gráfica final:



Ejercicios:

Calcula las asíntotas de las siguientes funciones y la posición de las curvas respecto a ellas:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-x+6}$
b) $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2-4}$
c) $h(x) = 3^{x-2}$
d) $j(x) = \frac{2^x}{x}$

LUNES 05-10-2009

RESOLVAMOS PRIMERO LOS EJERCICIOS PLANTEADOS EL VIERNES

Ejercicios:

Calcula las asíntotas de las siguientes funciones y la posición de las curvas respecto a ellas:

e) $f(x) = \frac{1}{x^2-x+6}$
f) $g(x) = \frac{x^3+x}{x^2-4}$
g) $h(x) = 3^{x-2}$
h) $j(x) = \frac{2^x}{x}$

1) $f(x) = \frac{1}{x^2-x+6}$

a. Asíntotas verticales. En ellas f(x)=±∞. Por tanto, en este caso de cociente de polinomios, el denominador se debe hacer cero (polos de la función)

Debemos igualar el denominador a 0 para calcular los polos. Resolvemos la ecuación: $x^2 - x + 6 = 0$. Encontramos que la raíz es negativa y, por tanto, no hay soluciones reales de esta ecuación. Así, no hay asíntotas verticales.

b. Asíntotas horizontales: Estudiamos el comportamiento de la función cuando x tiende a ±∞:

$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-x+6}$=0

El eje horizontal (y=0) es la asíntota horizontal de esta curva (única).

Veamos la posición de la curva respecto a la asíntota cuando x tiende a $\pm\infty$:

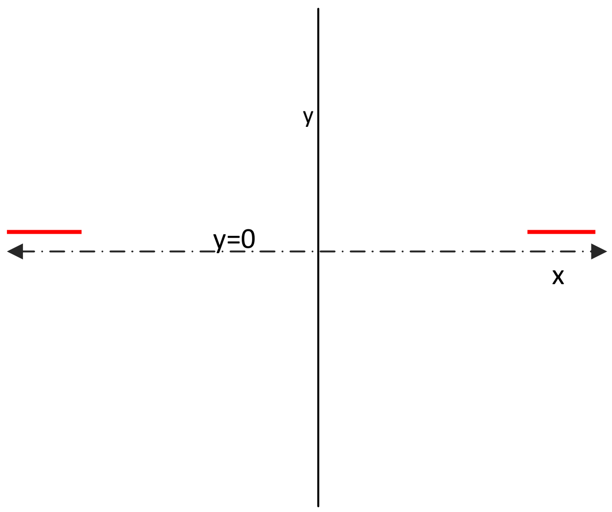
Calculamos: $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 0) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2-x+6} - 0\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2-x+6}\right) = 0^+$

Al ser todos los términos de la fracción positivos .

Al aproximarnos a +∞, hay un término negativo (-x), pero es menor que el positivo, (x^2), por tanto, el límite tendrá el mismo signo.

c. Asíntotas oblicuas: No hay, al haber asíntota horizontal.

Por tanto, la representación que tendríamos de las asíntotas, sería:



2) $g(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 - 4}$

A) Asíntotas verticales. Igualamos a cero el denominador para calcular los polos: Resolvemos la ecuación: $x^2-4=0$. Tenemos dos soluciones x=-2 y x=2. Estudiamos los límites laterales en ambos casos:

Para x = -2

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^3+x}{x^2-4} = \frac{(-2^-)^3 + (-2^-)}{(-2^-)^2 - 4} = \frac{-10^-}{0^+} = -\infty$$

Y

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^3+x}{x^2-4} = \frac{(-2^+)^3 + (-2^+)}{(-2^+)^2 - 4} = \frac{-10^+}{0^-} = +\infty$$

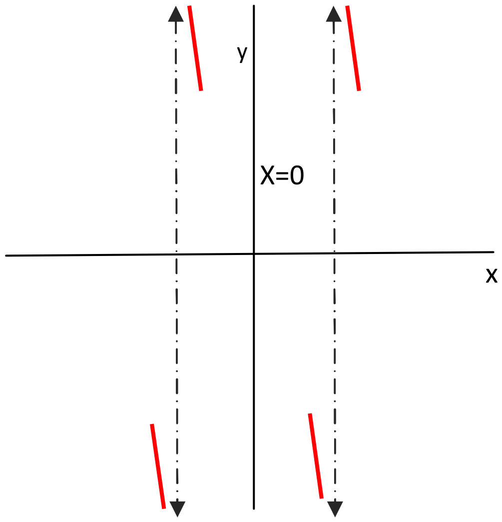
Para x = +2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3+x}{x^2-4} = \frac{(2^-)^3 + (2^-)}{(2^-)^2 - 4} = \frac{10^-}{0^-} = -\infty$$

Y

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3+x}{x^2-4} = \frac{(2^+)^3 + (2^+)}{(2^+)^2 - 4} = \frac{10^+}{0^+} = +\infty$$

Por tanto, en la gráfica de nuestra función, hasta ahora, sabemos que junto a las asíntotas verticales, de ecuación x=-2 y x=+2 , la curva hará lo que podemos ver en la figura:



B) Asíntotas horizontales: Estudiamos el comportamiento de la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$y = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x}{x^2-4} = \pm\infty$

No hay, por tanto, asíntotas horizontales.

C) Asíntotas oblicuas: Son de la forma y= mx +n donde: $m = \lim_{x\to\infty}(f(x)/x)$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$

Calculamos primero la pendiente "m":

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+x}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^3-4X} = +1$ m es un nº real. Por tanto, en principio, hay asíntota oblicua.

Al ser los términos de mayor grado (x3) del mismo grado, el signo del resultado no cambia cuando hagamos el límite con - ∞, por tanto habrá una única pendiente para la asíntota oblicua.

Hallamos ahora el valor de n: $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+x}{x^2-4} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+x-x^3+4x}{x^2-4}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+4x}{x^2-4}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{5x}{x^2-4}\right] = 0$$

La asíntota oblicua tiene de ecuación **y= +x**

Por tanto, podríamos trazar ya la asíntota oblicua para estudiar el comportamiento de la curva cuando los valores reales de la variable independiente se hacen cada vez más lejanos. Antes, para ver si la curva está por encima o por debajo de la asíntota oblicua cuando nos vamos hacia el infinito, estudiamos el signo de la diferencia entre la curva y la asíntota, en el límite:

Hacemos por tanto:

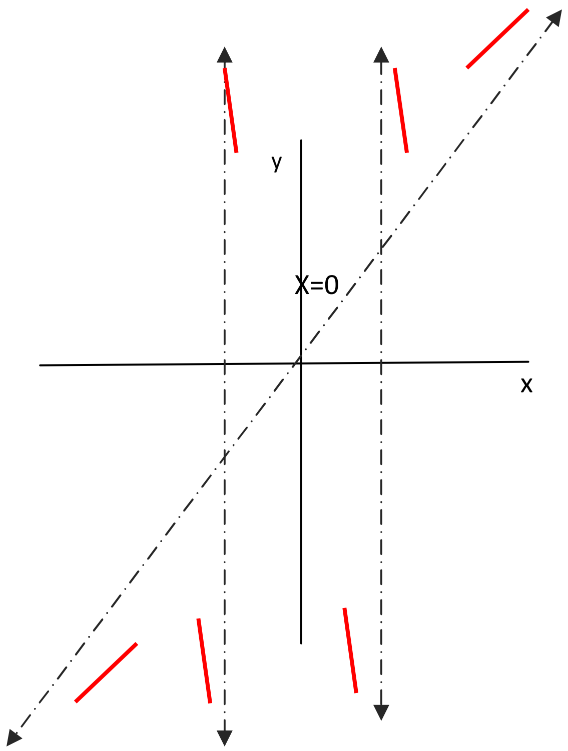
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+n)) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2-4}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+x-x^3+4x}{x^2-4}\right) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{5x}{x^2-4}\right) =$$

cuando $x\to+\infty$: $\frac{+\infty}{+\infty}=0^+$

cuando $x\to-\infty$: $\frac{-\infty}{+\infty}=0^-$

Por tanto, cuando x tienda a $+\infty$ la curva estará por encima de la asíntota y al contrario cuando tiende a $-\infty$. Así, tendremos finalmente el siguiente aspecto de nuestra curva, con sus asíntotas, lo cual nos ayudará mucho en su representación gráfica final:



3) $h(x) = 3^{x-2}$

A) Asíntotas verticales. No tiene porque para que la función exponencial se haga infinito, el valor de x debe ser también infinito.

B) Asíntotas horizontales:

En las funciones exponenciales, hay que estudiar cuidadosamente los límites en $+\infty\ y\ en - \infty$.

$y = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3^{x-2} = 3^{\infty} = \infty$ No hay en la parte positiva del eje X.

Veamos cuando x tiende a $-\infty$

$$y = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3^{x-2} = 3^{-\infty} = 0$$

Por lo tanto, el eje horizontal presenta una rama asintótica cuando x tiende a $-\infty$

Veamos la posición de la asíntota respecto a la curva. Hacemos el límite de la diferencia entre la función y la asíntota:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 0) = \lim_{x\to-\infty} 3^{x-2} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0^{+}$$

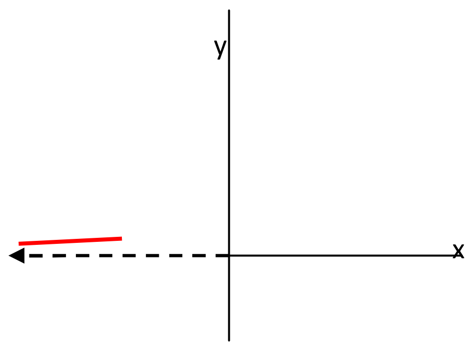
C) Asíntotas oblicuas. Al haber asíntota horizontal hacia menos infinito, en ese lado no puede haber asíntota oblicua. Sin embargo, en más infinito sí podría haberla.

Intentamos calcular la pendiente de esa asíntota:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{3^{x-2}}{x} = \infty$, porque la función exponencial es de grado muy superior a la polinómica.

Como norma general, las funciones exponenciales, no presentan asíntotas oblicuas, sino solo una rama asintótica horizontal.

Con la información que tenemos, podemos dibujar lo siguiente:



4) $j(x) = \frac{2^x}{x}$

a) Asíntotas verticales. Para que la función exponencial se haga infinito, el valor de x debe ser también infinito. Sin embargo, tenemos un denominador que es polinómico, por lo tanto va a haber polos cuando se anule el denominador:

Resolvemos la ecuación$x = 0$, que va a ser la ecuación de la asíntota vertical.

Estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2^x}{x} = \frac{(2)^{0^-}}{0^-} = \frac{1^-}{0^-} = -\infty$$

Y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2^x}{x} = \frac{(2)^{0^+}}{0^+} = \frac{1^+}{0^+} = +\infty$$

b) Asíntotas horizontales:

Como en el caso anterior, estudiamos los límites en $+\infty\ y\ en - \infty$.

$y = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x} = \infty$. Como la función exponencial es mucho mayor que la polinómica, no hay asíntota en la parte positiva del eje X. Veamos cuando x tiende a $-\infty$

$$y = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x}{x} = \frac{2^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Por lo tanto, el eje horizontal presenta una rama asintótica cuando x tiende a $-\infty$

Veamos la posición de la asíntota respecto a la curva. Hacemos el límite de la diferencia entre la función y la asíntota:

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - 0) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x}{x} = \frac{2^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^-$$

Por tanto, en este caso, la curva estará por debajo de la rama asintótica cuando se aproxime a menos infinito.

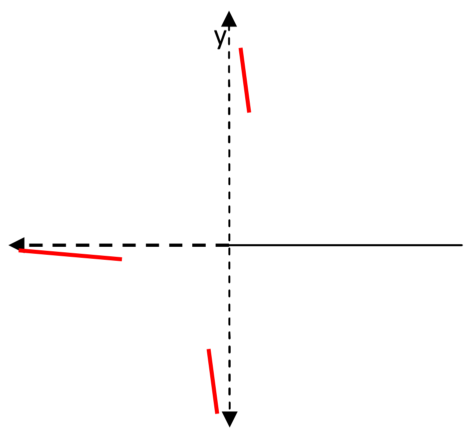
c) Asíntotas oblicuas. Al haber asíntota horizontal hacia menos infinito, en ese lado no puede haber asíntota oblicua. Sin embargo, en más infinito sí podría haberla.

Intentamos calcular la pendiente de esa asíntota:

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{x^2} = \infty$, porque la función exponencial es de grado muy superior a la polinómica.

Como norma general, las funciones exponenciales, no presentan asíntotas oblicuas, sino solo una rama asintótica horizontal.

Con esta información, la representación de las asíntotas de esta curva y su posición respecto a ellas sería:



Realiza las siguientes actividades:

1.- Sea $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. Se pide:

a) Calcula las asíntotas de dicha función.

b) Calcula $\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(f(x+1) - f(x)\right)\right]$

2.- Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x < 2 \\ x^2 - 3 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Determinar las asíntotas de la misma

3.- Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Se pide:

a) Calcula las asíntotas de dicha función.

b) Estudia el acercamiento de la curva a las asíntotas.

4.- Calcula el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4}$$

MARTES 06-10-2009

RESOLVAMOS LOS EJERCICIOS PLANTEADOS AYER, SELECCIONADOS DE PRUEBAS DE SELECTIVIDAD.

1.- Sea $f(x) = \frac{2x}{x+1}$. Se pide:

a) Calcula las asíntotas de dicha función.

b) Calcula $\lim_{x \to +\infty} \left[x^2 \left(f(x+1) - f(x) \right) \right]$

a) La función $f(x)$ viene definida por una expresión racional polinómica cuyo denominador se anula en $x = -1$; no así el numerador. Por lo tanto, tenemos que Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y, como la función es continua en su dominio de definición, su gráfica solo podrá tener una asíntota vertical en $x = -1$.

Calculemos los límites laterales de $f(x)$ en dicho punto:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Así pues, la gráfica de $f(x)$ tiene, en efecto, una asíntota vertical en $x = -1$, punto en el cual la función presenta una discontinuidad inevitable de salto doblemente infinito.

Por otro lado, como el grado del polinomio presente en el numerador es el mismo que el grado del polinomio que aparece en el denominador, tenemos que:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

por lo cual la gráfica de $f(x)$ posee una asíntota horizontal en $y = 2$. Al tener una asíntota horizontal, no puede tener ninguna asíntota oblicua.

b) El límite pedido es:

$$\lim_{x \to +\infty} [x^2 f(x+1) - f(x)] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x^2 \frac{2(x+1)}{(x+1)+1} - \frac{2x}{x+1} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[x^2 \frac{2x+2}{x+2} - \frac{2x}{x+1} \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^3 + 2x^2}{x+2} - \frac{2x}{x+1} \right] = \infty - 2 = \infty$$

2.- Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x < 2 \\ x^2 - 3 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Determinar las asíntotas de la misma

a) Nos encontramos ante una función $f(x)$ definida a trozos. El primero de ellos es una función racional polinómica cuyo denominador se anula en $x = 1$, mientras que el numerador es distinto de 0 en dicho punto. Por lo tanto, en $x = 1$ la función $f(x)$ no está definida y sus límites laterales son:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} = \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Así pues, la función $f(x)$ presentará una discontinuidad inevitable de salto doblemente infinito en $x = 1$ y su gráfica tendrá una asíntota vertical en este punto. Además, como el grado del numerador es menor que el grado del denominador, la gráfica de la función $f(x)$ tendrá, asimismo, una asíntota horizontal por la izquierda de ecuación $y = 0$, ya que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\infty - 1} = -\frac{1}{\infty} = 0^-$$

El segundo trozo es una función polinómica que será continua en su respectivo dominio de definición, ya que lo es en todo $\mathbb{R}$.

3.- Sea $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Se pide:

a) Calcula las asíntotas de dicha función.

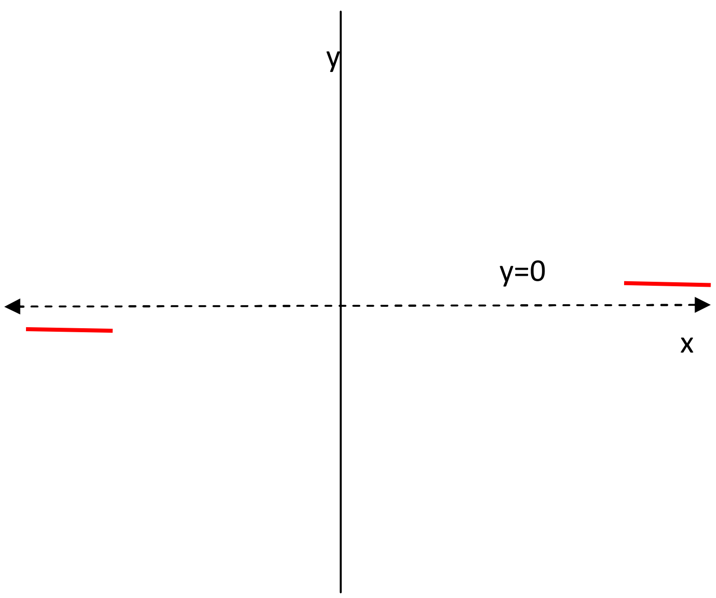
b) Estudia el acercamiento de la curva a las asíntotas.

a) La función $f(x)$ es una función racional polinómica cuyo denominador no se anula en ningún valor real de la variable independiente x. Así pues, el dominio de esta función es toda la recta real y su gráfica no puede tener asíntotas verticales. Además, la función $f(x)$ es continua y derivable en todo su dominio de definición. Como el grado del denominador es superior al grado del numerador, la gráfica de la función $f(x)$ posee una asíntota horizontal de ecuación $y = 0$, por lo cual no puede haber asíntotas oblicuas. Los límites en el infinito son:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}}{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} + \frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0^{\pm}}{1+0} = 0^{\pm}$$

Con El límite anterior, podemos concluir, dados los signos, que la función se aproximará a la asíntota por encima de ella cuando x tienda a $+\infty$ y por debajo en el otro extremo del eje horizontal, como podemos ver en la gráfica siguiente:



4.- Calcula el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{x^4}\right)=\left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt{x^4+1}-1\right)\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)}{x^4\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\sqrt{x^4+1}\right)-1^2}{x^4\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^4+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^4\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}\left(\sqrt{x^4+1}+1\right)}\right]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^4+1}+1}\right)=\frac{1}{2}$$

Para la próxima clase, jueves, debéis repasar vuestros apuntes del curso pasado sobre continuidad de funciones:

- Definición de función continua en un punto y en un intervalo.
- Tipos de discontinuidades.

CLASE DEL VIERNES 09-10-10

Ejercicios .-

4.- Estudiar la continuidad de la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^x-1}, & x<0\\ 3x-1, & 0\le x<2\\ x^2+1, & x\ge 3\end{cases}$$

Resuelve las actividades de la página 191 de nuestro libro de texto: 3 b, 3c, 3d, 3e y 3f

4.-

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{e^x-1}, & x<0 \\ 3x-1, & 0\le x<2 \\ x^2+1, & x\ge 2 \end{cases}$$

F(x) está definida a trozos.

En x<0 f(x) es continua porque está constituida por un cociente de funciones continuas en todo R, salvo en x=0, donde se anula el denominador.

En 0<x<2, f(x) es continua porque la rama que aparece es una recta, continua en todo R.

Igual sucede para x>2, pues la última rama es una rama parabólica.

Estudiemos donde cambiamos de definición, pues es donde se podrán producir discontinuidades:

X=0

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{e^x-1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (3x-1) = -1 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

X=2

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x-1) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+1) = 5 \end{array}\right\} \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 5 = f(2)$$

Por tanto f(x) es continua en todo R-{0}. En x=0 presenta una discontinuidad de salto infinito, con una asíntota vertical.

3.b

CLASE DEL VIERNES 09-10-10

Ejercicios .-

4.- Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^x - 1}, & x < 0 \\ 3x - 1, & 0 \le x < 2 \\ x^2 + 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

Resuelve las actividades de la página 191 de nuestro libro de texto: 3 b, 3c, 3d, 3e y 3f

4.-

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^x - 1}, & x < 0 \\ 3x - 1, & 0 \le x < 2 \\ x^2 + 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

F(x) está definida a trozos.

En x<0 f(x) es continua porque está constituida por un cociente de funciones continuas en todo R, salvo en x=0, donde se anula el denominador.

En 0<x<2, f(x) es continua porque la rama que aparece es una recta, continua en todo R.

Igual sucede para x>2, pues la última rama es una rama parabólica.

Estudiemos donde cambiamos de definición, pues es donde se podrán producir discontinuidades:

X=0

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{e^x - 1} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (3x - 1) = -1 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x\to 0} f(x)$$

X=2

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + 1) = 5 \end{array}\right\} \exists \lim_{x\to 0} f(x) = 5 = f(2)$$

Por tanto f(x) es continua en todo R-{0}. En x=0 presenta una discontinuidad de salto infinito, con una asíntota vertical.

Ejercicios pag 191 3b al 3f:

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2-x}}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{1/x}}$

f) $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{sen\ x}$

Soluciones:

b) Dom $f = \mathbb{R}$. La función es continua en $x < 0$ y en $x > 0$. Además: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$, luego la función es continua en $\mathbb{R}$.

c) Dom $f = \mathbb{R}$. La función es continua en $x < -1$ y en $x > -1$. Además: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to -1^+} (x) = 0 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to -1} f(x)$, luego la función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

d) Dom $f = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$. La función es continua en su dominio.

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$. La función es continua en su dominio.

f) Dom $f = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. La función es continua en su dominio.

Ejercicios para el martes: Pag 191, ej 4.

4 [redacted] **PAU** **Estudia para qué valores de a son continuas en $\mathbb{R}$ estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^3 - ax^2 + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + |x|}{1 - x} & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{-2 + 2\sqrt{x + 2}}{x + 1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) \begin{cases} 1 + a^x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(x^2 + a) & \text{si } x > 0 \; (a > 0) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x + 1)^2 - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Soluciones:

a) En $\mathbb{R} - \{-1\}$, la función es continua. Estudiamos qué sucede en $x = -1$: $f(-1) = 2 - a$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -2a - 1$; $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2 - a$, para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir, luego $a = -3$.

b) En realidad la función se puede escribir como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{-2 + 2\sqrt{x + 2}}{x + 1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$f(-1) = a$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -1^-} \frac{4(x + 2) - 4}{(x + 1)\left(2\sqrt{x + 2} + 2\right)} = 1$$

Luego $a = 1$

c) $f(0) = 2$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln a$. Para que $f(x)$ sea continua, debe ser $a = e^2$.

d) $\lim_{x \to 0} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} (2x + 2) = 2$, luego para que la función sea continua, $a = 2$.

CLASE DEL MARTES 13-10-10

Ejercicios .-

Ejercicios para el martes: Pag 191, ej 4.

4 PAU **Estudia para qué valores de a son continuas en $\mathbb{R}$ estas funciones:**

a) $f(x)=\begin{cases} ax^3-3x^2-ax+2 & \text{si } x<-1 \\ x^3-ax^2+1 & \text{si } x\geq -1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+|x|}{1-x} & \text{si } x<-1 \\ a & \text{si } x=-1 \\ \dfrac{-2+2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x>-1 \end{cases}$

c) $f(x)\begin{cases} 1+a^x & \text{si } x\leq 0 \\ \ln(x^2+a) & \text{si } x>0\ (a>0) \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2-1}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ a & \text{si } x=0 \end{cases}$

Soluciones:

a) En $\mathbb{R}-\{-1\}$, la función es continua. Estudiamos qué sucede en $x=-1$: $f(-1)=2-a$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-2a-1$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=2-a$, para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir, luego $a=-3$.

b) En realidad la función se puede escribir como:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x<-1 \\ a & \text{si } x=-1 \\ \dfrac{-2+2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

$f(-1)=a$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-1$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -1^-} \frac{4(x+2)-4}{(x+1)\left(2\sqrt{x+2}+2\right)} = 1$$

Luego $a = 1$

c) $f(0) = 2$

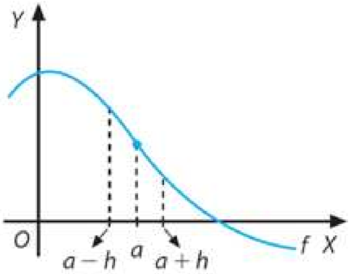
$\lim_{x \to 0} f(x) = 2$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln a$. Para que $f(x)$ sea continua, debe ser $a = e^2$.

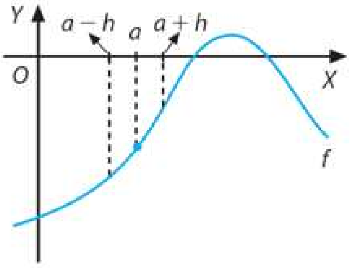
d) $\lim_{x \to 0} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} (2x + 2) = 2$, luego para que la función sea continua, $a = 2$.

TEOREMAS ASOCIADOS A LA CONTINUIDAD DE FUNCIONES

TEOREMA SOBRE LA CONSERVACIÓN DEL SIGNO EN UN ENTORNO

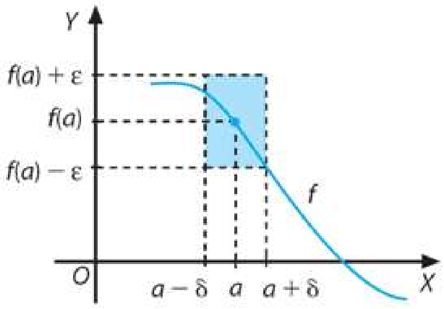
Si una función f es continua en a, y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno de a en que la función tiene el mismo signo que $f(a)$.





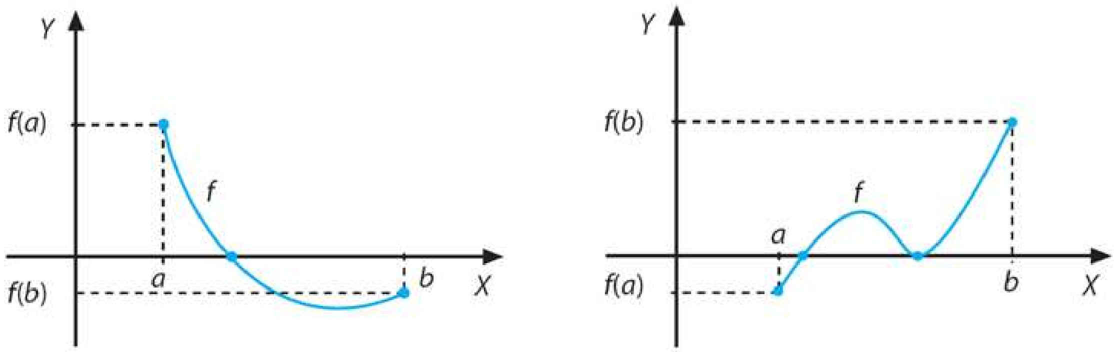
TEOREMA DE ACOTACIÓN

Si una función f es continua en a, entonces existe un entorno de a en que la función está acotada.



TEOREMA DE BOLZANO

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.



TEOREMA DE ACOTACIÓN

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces está acotada en $[a, b]$.

Ejemplo de aplicación del teorema de Bolzano (MUY IMPORTANTE). Permite resolver por aproximación ecuaciones que no tienen solución entera.

Ej. Comprobar y resolver con al menos una cifra decimal exacta en el intervalo [-2, -1] la ecuación $y = x^3 - 2x + 1 = 0$.

Primero comprobamos que la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo:

$$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 1 = -3$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = +2$$

Programamos la ecuación en la calculadora y vamos dando valores, acercándonos tanto como queramos al valor exacto. Podemos poner separados los valores de los extremos y, cada nuevo valor que damos lo colocamos junto al extremo del signo correspondiente. Tenemos f(-2) y f(-1) como los dos primeros valores. Calculamos ahora f(-1,5)=0,625. Al ser mayor que 0, lo situamos junto al extremo de -1, dado que salió positivo. Tenemos que seguir buscando la solución en el intervalo [-2,-1,5]. Probamos f(-1,7)=-0,513. Al resultar negativo, lo ponemos junto a -2. Así podemos seguir consecutivamente, hasta aproximarnos a la solución cuanto queramos. Los valores probados, se han marcado como 5º, 6º, …

(1º valor) $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 1 = -3$

(4º valor) $f(-1{,}7) = -0{,}513$

(6º valor)$f(-1{,}65) = -0{,}192125$

(7º valor)$f(-1{,}62) = -0{,}011528$

…

(8º valor)$f(-1{,}61) = 0{,}046719$

(5º valor)$f(-1{,}6) = 0{,}104$

(3º valor)$f(-1{,}5) = 0{,}625$

(2º valor) $f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = +2$

Por tanto, la solución (ya con dos cifras decimales exactas), sería x= -1,61. Podríamos seguir aproximándonos tanto como quisiéramos a la solución real.

CLASE DEL JUEVES 15-10-10

Ejercicios .-

Pag. 196 Ej. 14 (resuelto) Averiguar, con una cifra decimal exacta, cuál es la solución de la ecuación $y = x^3 - 2x + 1 = 0$, comprendida en el intervalo [-2, -1].

Como f(x) es continua en R, por ser polinómica, comprobamos que la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo:

$$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 1 = -3$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = +2$$

Por tanto, podemos aplicar el teorema de Bolzano para resolverla.

Programamos la ecuación en la calculadora y vamos dando valores, acercándonos tanto como queramos al valor exacto. Podemos poner separados los valores de los extremos y, cada nuevo valor que damos lo colocamos junto al extremo que haya dado un resultado del mismo signo. Tenemos f(-2) y f(-1) como los dos primeros valores. Calculamos ahora f(-1,5)=0,625. Al ser mayor que 0, lo situamos junto al extremo de -1, dado que también salió positivo. Tenemos que seguir buscando la solución en el intervalo [-2,-1,5]. Probamos f(-1,7)=-0,513. Al resultar negativo, lo ponemos junto a f(-2). Así podemos seguir consecutivamente, hasta aproximarnos a la solución cuanto queramos. Los valores probados, se han marcado como 5º, 6º, …

(1º valor) $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) + 1 = -3$

(4º valor) $f(-1{,}7) = -0{,}513$

(6º valor)$f(-1{,}65) = -0{,}192125$

(7º valor)$f(-1{,}62) = -0{,}011528$

…

(8º valor)$f(-1{,}61) = 0{,}046719$

(5º valor)$f(-1{,}6) = 0{,}104$

(3º valor)$f(-1{,}5) = 0{,}625$

(2º valor) $f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) + 1 = +2$

Por tanto, la solución sería:

Con una cifra decimal exacta: x= -1,6

Con dos cifras decimales exactas: x= -1,61

Ejemplos:

Pag. 196 ej 10 Resuelve las siguientes cuestiones.

a) Demuestra que existe al menos un número real para el cual se verifica la ecuación $x^2 + e^x = 1 - senx$

Construimos la función $f(x) = x^2 + e^x - 1 + senx$ Esta función está constitutida por 4 sumandos que son, a su vez, funciones continuas y con dominio en todo R; por tanto, f(x) existe y es continua en todo R.

Observando la función creada, los posibles valores que hagan cambiar de signo la función estarán alrededor de x=0.

Probamos los valores de x=-1 y x=1.

OJO: Debemos ser conscientes de que la calculadora habremos de ponerla en el modo RAD para poder operar conjuntamente funciones trigonométricas con otras.

$$f(-1) = (-1)^2 + e^{-1} - 1 + sen(-1) = \frac{1}{e} - sen(1\,rad) = -0{,}47359$$

$$f(1) = (1)^2 + e^1 - 1 + sen(1) = e + sen(1\,rad) = 3{,}55975$$

Por tanto, se cumplen todas las condiciones del teorema de Bolzano y podemos asegurar que hay al menos una solución real de la ecuación $x^2 + e^x = 1 - senx$. Por otra parte, es

evidente la solución, pues los dos miembros de la ecuación valen 1 cuando hacemos x=0, siendo esta la solución real de esta ecuación.

b) Determina un intervalo de longitud 0,1 en el que esté comprendida una solución de la ecuación 2x+1=sen x.

Procedemos igual que en el caso anterior. Hacemos la función $f(x) = 2x + 1 - senx$. Como está constituida por sumandos que son funciones continuas y existen en todo R, f(x) tiene como dominio todos los números reales y es siempre continua. Por tanto, debemos encontrar valores donde se produzca un cambio de signo de la función para que podamos encontrar la solución de esta ecuación.

OJO: Igual que en el caso anterior, debemos ser conscientes de que la calculadora tenemos que ponerla en el modo RAD para poder operar conjuntamente funciones algebraicas y trigonométricas (2x+ 1 y senx).

Como el recorrido de la función senx es [-1, +1], la función f(x) planteada se podrá anular en valores pequeños o negativos, no en valores grandes positivos.

Comenzamos por probar x=0: $f(0) = 2x \cdot 0 + 1 - sen0 = 1$

Probamos ahora x=-1: $f(-1) = 2(-1) + 1 - sen(-1) = -0{,}15853$

Por tanto, podemos comenzar a buscar la solución en el intervalo [-1, 0]

Probamos ahora x=-0,7. Nos ha resultado más cercano a la solución x=-1 que x=0. Lógicamente, suponemos que el resultado debe estar más próximo al extremo -1 del intervalo que al origen de coordenadas. Comprobamos nuestra suposición:

$$f(-0{,}7) = 2(-0{,}7) + 1 - sen(-0{,}7) = 0{,}2442$$

Es correcto lo que habíamos supuesto. El nuevo intervalo de solución sería [-1, -0’7].

Probamos ahora x=-0,8: $f(-0{,}8) = 0{,}1173 \Rightarrow x \in [-1, -0'8]$

Probamos ahora x=-0,9: $f(-0{,}9) = -0{,}01667 \Rightarrow x \in [-0{,}9, -0'8]$

Entonces, hemos alcanzado el intervalo propuesto en el enunciado, ya que el último tiene la amplitud requerida.

Solución: $x \in [-0{,}9, -0'8]$

Como sabemos, podríamos seguir hasta encontrar una solución tan precisa como deseáramos.

Pag 199. Ej 13. Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{1-cosx}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}$

Calcula el valor del parámetro a para que la función tome todos los valores comprendidos entre f(-1) y f(1).

f(X) es continua en todo R-{0} pues tanto el numerador como el denominador de la fracción lo son.

Debemos hacer que el parámetro *a* coincida con el $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2}$

Si hacemos el límite (lo ideal será resolverlo aplicando la regla de L’Hôpital, una vez que sepamos derivadas) nos da ½.

Por tanto, a=1/2.

Ejercicios para mañana viernes:

Pag 196, 11; Pag 199, 14 y 15

CLASE DEL VIERNES 16-10-10

Hemos resuelto hoy en clase los ejercicios siguientes:

Pag 196: Ej 11

Pág 199: Ejs 14 y 15

Pag 203 Ej 5 c.

Propuestos para el lunes: Pag 203 5 a y 5f. Pag 204 6 (a, d, e, f), 7, 13, 15, 22.

Para que tengáis más material de apoyo os pego en las páginas siguientes las soluciones de la mayoría de los ejercicios del tema, además de los arriba indicados:

Cuestiones previas (página 186)

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \left(1 - \dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x+1}}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} xe^{-x}$

a) $\lim\limits_{x \to -1} \left(1 - \dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x+1}} = (1^{\infty}) =$

$$= \lim_{x \to -1} \left(1 + \frac{1}{\dfrac{-x+1}{x+1}}\right)^{\frac{-x+1}{x+1} \cdot \frac{1}{-x-1}} = e^{1/2}$$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} xe^{-x} = (0 \cdot \infty) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$

2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x} & \text{si } x > 0 \\ \ln(x^2+1) & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

a) **Calcula su dominio.**

b) **Calcula $f(0)$ y $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.**

c) **¿Cómo se comporta la función en $x = 0$?**

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) $f(0) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x^2+1) = 0 \end{cases}$

c) La función es discontinua en $x = 0$, tiene una discontinuidad asintótica.

3. Calcula en qué intervalo de la recta real se cumple que $|f(x)| < \dfrac{1}{2}$, donde $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$.

En el intervalo $(-2, 0)$.

Actividades del desarrollo (páginas 187/199)

1 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:**

a) **$f(x) = E(x)$, en $x = \dfrac{2}{3}$ y en $x = 1$.**

b) **$f(x) = \dfrac{2-x}{2x^3 - x}$, en $x = 0$ y en $x = 2$.**

c) **$f(x) = 4 - \ln x$, en $x = 0$ y en $x = 4$.**

b) **$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, en $x = 0$.**

a) En $x = \dfrac{2}{3}$ es continua; en $x = 1$ no es continua, porque los límites laterales son distintos.

b) En $x = 0$ y en $x = 2$ no existe imagen, por lo que f no es continua.

c) En $x = 0$ no es continua, puesto que no es del dominio; en $x = 4$ es continua.

d) No es continua, puesto que $f(0)$ no está definida.

2 **Indica en qué casos es posible salvar la discontinuidad en las funciones de la actividad anterior.**

En *b)* se puede salvar la discontinuidad en el punto $x = 2$ imponiendo $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1/2$.

En *d)* imponiendo $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

3 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x^3 - 1}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2} & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2-x}}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^{1/x}}$

f) $f(x) = \ln \dfrac{(1+x^2)}{\operatorname{sen} x}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$. Dado que es racional, es continua en su dominio.

b) Dom $f = \mathbb{R}$. La función es continua en $x < 0$ y en $x > 0$. Además: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$, luego la función es continua en $\mathbb{R}$.

c) Dom $f = \mathbb{R}$. La función es continua en $x < -1$ y en $x > -1$. Además: $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to -1^+} (x) = 0 \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to -1} f(x)$, luego la función es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

d) Dom $f = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$. La función es continua en su dominio.

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$. La función es continua en su dominio.

f) Dom $f = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. La función es continua en su dominio.

4 **PAU** **Estudia para qué valores de a son continuas en $\mathbb{R}$ estas funciones:**

a) $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - ax + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - ax^2 + 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + |x|}{1 - x} & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{-2 + 2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) \begin{cases} 1 + a^x & \text{si } x \le 0 \\ \ln(x^2 + a) & \text{si } x > 0 \ (a > 0) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2 - 1}{x} & \text{si } x \ne 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) En $\mathbb{R} - \{-1\}$, la función es continua. Estudiamos qué sucede en $x = -1$: $f(-1) = 2 - a$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -2a - 1$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2 - a$, para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir, luego $a = -3$.

b) En realidad la función se puede escribir como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ a & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{-2 + 2\sqrt{x+2}}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$f(-1) = a$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{4(x+2)-4}{(x+1)\left(2\sqrt{x+2}+2\right)} = 1$

Luego $a = 1$

c) $f(0) = 2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln a$. Para que $f(x)$ sea continua, debe ser $a = e^2$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} (2x+2) = 2$, luego para que la función sea continua, $a = 2$.

5 **Clasifica las discontinuidades de la función:**

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-|x|}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2+x} = \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2+x}{x^2-x} = \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

En $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$, discontinuidad evitable en $x = 0$.

En $x = -1$, $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \infty$, discontinuidad asintótica en $x = -1$.

En $x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$, discontinuidad asintótica en $x = 1$.

6 **Clasifica las discontinuidades de las funciones de la actividad 3 de este epígrafe. Cuando la discontinuidad sea evitable, calcula el valor que debe asignarse a la función para salvar la discontinuidad.**

a) En $x = 1$, discontinuidad asintótica.

b) No hay discontinuidades.

c) En $x = -1$, discontinuidad de salto.

d) En $x = 0$, discontinuidad evitable: si $f(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, f es continua en $(-\infty, 2)$.

e) En $x = 0$, discontinuidad de salto.

f) En $x = 0$, discontinuidad evitable: si $f(0) = 0$, f es continua en $x = 0$. Las otras discontinuidades son asintóticas.

7 **PAU** **Dada la función $f(x) = \frac{x^2-x-b}{2x^3-ax-2x}$ averigua a y b sabiendo que en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad evitable. A continuación, calcula y clasifica las demás discontinuidades.**

Si la discontinuidad es evitable en $x = 2$, entonces el límite de la función cuando x tiende a 2 es del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$2^2 - 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2$

$2 \cdot 2^3 - a \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow a = 3$

Dom $f = \mathbb{R} - \left\{0, 2, -\frac{1}{2}\right\}$

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{2x^3-3x^2-3x} = \frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+1/2)} = \frac{3}{14}$, como ya se ha dicho, discontinuidad evitable en $x = 2$.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+1/2)} = \infty$, en $x = 0$, discontinuidad asintótica.

$\lim\limits_{x\to -1/2} \frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+1/2)} = \infty$, en $x = -\frac{1}{2}$, discontinuidad asintótica.

8 **PAU** **Razona si la función $f(x) = \operatorname{tg} x$ tiene algún cero en un punto interior del intervalo cerrado $[0, \pi]$.**

No se puede asegurar que tenga algún cero, ya que en $x = \frac{\pi}{2}$ la función no es continua y $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

9 **Precisa hasta las centésimas la solución del ejemplo 14 del libro del alumno.**

$x = -1{,}62$

10 **PAU** **Resuelve las siguientes cuestiones:**

***a)* Demuestra que al menos existe un número real para el cual se verifica la ecuación $x^2 + e^x = 1 - \operatorname{sen} x$.**

***b)* Determina un intervalo de longitud 0,1 en el que esté comprendida una solución de la ecuación $2x + 1 = \operatorname{sen} x$.**

a) $f(x) = x^2 + e^x - 1 + \operatorname{sen} x$

La función es continua en $\mathbb{R}$ y $f(1) \cdot f(-1) < 0$, por lo tanto, hay un valor entre -1 y 1 para el cual $f(x)$ se anula, lo que quiere decir que se verifica la ecuación dada.

b) $f(x) = 2x + 1 - \operatorname{sen} x$. Es una función continua.

$f(-0{,}9) = -0{,}0167$

$f(-0{,}8) = 0{,}1174$

En el intervalo $(-0{,}9, -0{,}8)$ la función se anula, lo que quiere decir que la ecuación $2x + 1 = \operatorname{sen} x$ tiene solución en el intervalo $(-0{,}9, -0{,}8)$.

11 **La ecuación $(x+1)^{\ln x} = 5$ tiene una solución en el intervalo $[3, 4]$. Hállala con dos cifras decimales exactas. (La función $f(x) = (x+1)^{\ln x}$ es continua en $\mathbb{R}^+$.)**

$f(x) = (x+1)^{\ln x} - 5$, continua en $\mathbb{R}^+$.

$f(3{,}117) = -0{,}0031$

$f(3{,}118) = 0{,}0005$

La solución es $x = 3{,}12$.

12 **Sea f una función que toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. ¿Significa esto que la función es continua en $[a, b]$? Para reflexionar sobre esta pregunta, ayúdate de una representación gráfica.**

No necesariamente.

Por ejemplo, la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Toma todos los valores comprendidos entre $f(0) = 0$ y $f(2) = 1$, y sin embargo tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$, por lo que no es continua en $[0, 2]$.

13 **PAU** **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcula el valor del parámetro a para que la función tome todos los valores comprendidos entre $f(-1)$ y $f(1)$.

Como se ha visto en los ejercicios resueltos de la unidad 7, en el apartado de infinitésimos podemos escribir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto $f(0) = \frac{1}{2}$.

14 **Sea f una función acotada en el intervalo $[a, b]$. ¿Significa esto que f es continua en $[a, b]$? Ayúdate de una representación gráfica.**

No necesariamente. Sirve de ejemplo la misma función que en la actividad 12. La función está acotada en $[0, 2]$, y, sin embargo, no es continua.

15 **Si f es una función acotada en $[a, b]$ y no es continua en dicho intervalo, ¿qué tipo de discontinuidades puede presentar en $[a, b]$?**

Discontinuidades evitables, de salto o esenciales no asintóticas.

5 Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades:

a) $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{2}{4 - x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -(x - 1)^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 + 2^{1/x} & \text{si } x < 0 \\ |x^2 - x + 1| & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln |x - 1| & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{|x - 2|}{x - 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{e^x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5 - \sqrt{25 - x}}{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x + \ln (x + 1)}{20x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Para $x < 2$ la función es continua, puesto que es una exponencial.

Para $x > 2$, la función es continua, puesto que es racional y definida para todo valor real, excepto 2 y -2 que no pertenecen al dominio de definición.

Obsérvese que en $x = 2$, $f(2) = 9$, pero:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 3^x = 9 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2}{4 - x^2} = \dfrac{2}{0} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$$

Por tanto, f tiene en $x = 2$ una discontinuidad esencial, con una asíntota vertical por la derecha.

b) Para $x < 1$, la función es polinómica, por lo que es continua.

Para $x > 1$, la función es polinómica, por lo que es continua.

$f(1) = 1/2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} [-(x - 1)^2 + 1] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$$

La función es continua en $x = 0$ si $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$; luego debe ser $b = 5$. El parámetro a puede tomar cualquier valor real.

e) $\exists\, f(-1) = \pi$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -1 + a$; $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \pi$

Para que el límite exista, los límites laterales deben coincidir:

$$-1 + a = \pi \Rightarrow a = \pi + 1$$

Entonces, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = \pi$.

Luego la función es continua en $x = 0$ si $a = \pi + 1$.

f) $\exists\, f(2) = 4$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{4 - a}{0}$

Para que el límite exista, el límite lateral por la derecha en $x = 2$ debe existir. Para que esto sea así, el numerador $(x^2 - a) = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$ debe tener una raíz $x = 2$, es decir, $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = 4$

Por tanto, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$ si $a = 4$.

g) En $x = 0$, $f(0) = -a$

$\lim\limits_{x \to 0^-} (ax^2 + b) = b$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} (x - a) = -a$, por lo que si $b = -a$, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

En $x = 1$, $f(1) = a + b$

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x - a) = 1 - a$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{a}{x} + b\right) = a + b$, por lo que si $1 - a = a + b$, $f(x)$ es continua en $x = 1$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} a = -b \\ 1 - a = a + b \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1$

h) En $x = 0$, $f(0) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (a \cos x + b) = a + b \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = a + b$$

En $x = \pi$, $f(\pi) = -a + b$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pi} f(x) = -a + b \\ \lim\limits_{x \to \pi} f(x) = -a\pi \end{array}\right\} \Rightarrow -a + b = -a\pi$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 1 = a + b \\ -a + b = -a\pi \end{cases}$$

se obtiene:

$$a = \frac{-1}{\pi - 2} \text{ y } b = \frac{\pi - 1}{\pi - 2}$$

7 **PAU** **Halla a sabiendo que f: $[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua en $[0, +\infty)$:**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} & \text{si } 0 \le x \le 8 \\ \dfrac{x^3 - 32}{x - 4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

Estudiaremos la función en $x = 8$.

1) $\exists\, f(8) = \sqrt{8a}$

$$2) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 8^-} \sqrt{ax} = \sqrt{8a} \\ \lim\limits_{x \to 8^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 8^+} \dfrac{x^2 - 32}{x - 4} = 8 \end{cases} \Rightarrow 8 = \sqrt{8a} \Rightarrow a = 8$$

8 **PAU** **Calcula los valores de a y b para que la siguiente función sea continua para todo valor de x:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si } 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } \pi \le x \end{cases}$$

En $x = 0$

1) $\exists\, f(0) = 2a$

$$2) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2a\cos x) = 2a \end{cases} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

En $x = \pi$

1) $\exists\, f(\pi) = a\pi^2 + b$

$$2) \begin{cases} \lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = \pi^2 - 2a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a\pi^2 - b \end{cases} \Rightarrow 0 = -b - 2 \Rightarrow b = -2$$

9 **PAU** **Calcula a para que $f(x) = \dfrac{-2x^2 + ax + 1}{2x^2 + 5x + 2}$ tenga en $x = -\dfrac{1}{2}$ una discontinuidad evitable. Estudia si presenta otra discontinuidad y clasifícala.**

$f(x) = \dfrac{-2x^2 + ax + 1}{2x^2 + 5x + 2}$ tiene en $x = -\dfrac{1}{2}$ una discontinuidad evitable. Puesto que f es una función racional, $-\dfrac{1}{2}$ es una raíz de los polinomios del numerador y del denominador.

En efecto, para el denominador:

$2(-1/2)^2 + 5(-1/2) + 2 = (1/2) - (5/2) + 2 = -2 + 2 = 0$

Para el numerador:

$-2(-1/2)^2 + a(-1/2) + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Si $a = 1$, $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \left\{-2, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Por ser f una función racional, es continua en su dominio.

En $x = -2$, $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$, luego la discontinuidad es asintótica.

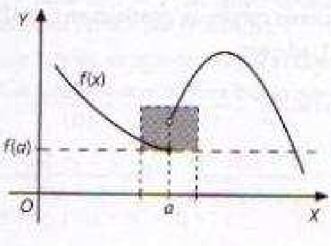
10 **PAU** **Sea $f(x) = \dfrac{\text{sen}\,(1 + x)}{x^2 + ax + 2a}$ una función que tiene en $x = -1$ una discontinuidad evitable. Averigua el valor del parámetro a.**

Como la discontinuidad es evitable, el límite debe existir en $x = -1$. Dado que el numerador se anula en este punto, el denominador debe anularse también, es decir, -1 debe ser una raíz de $x^2 + ax + 2a$.

Por tanto, $(-1)^2 + a(-1) + 2a = 0 \Rightarrow a = -1$

11 **Sea una función f tal que $f(x) > f(a)$, $\forall x \in E^*(a, \delta)$, con $\delta > 0$. Justifica si esto asegura que f es una función continua en $x = a$.**

Si una función f es continua en a, entonces existe un entorno de a en el que la función está acotada, inferior y superiormente. Pero que exista una cota inferior de f en un entorno de a, $f(a)$, no implica que la función sea continua en a. Obsérvese la figura:



12 **A partir del teorema de acotación, razona si la siguiente afirmación es correcta: «Si f no es una función continua en $x = a$, entonces no existe un entorno de a, $E(a, \delta)$, en que la función esté acotada.»**

La negación de la hipótesis del teorema de acotación no conduce a la negación de la conclusión. Solo se puede asegurar que si una función no está acotada en un entorno de un punto, entonces no es continua en dicho punto.

Una función puede no ser continua en a, y estar acotada en un entorno de a. Obsérvese la figura del ejercicio anterior.

Continuidad de una función en un intervalo

13 **Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $(0, 1)$ y $[0, 1]$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x - 1} & \text{si } x < 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $[0, 3]$

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2 - 1}{e^x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $[-\pi, 0]$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - 2^{1/x}} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $[-1, 0]$

a) En el intervalo $(0, 1)$, $f(x)$ es una función racional, cuyo denominador no se anula en dicho intervalo. Por tanto, f es continua en $(0, 1)$.

En el intervalo $[0, 1]$ debe cumplirse, además:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$$

Pero $f(0)$ no existe, por lo que la función no es continua en $[0, 1]$.

b) Para $x < 2$, la función es racional y su denominador se anula en $x = 1$; por tanto, no es continua en $x = 1$. Puesto que $1 \in [0, 3]$, podemos asegurar que f no es continua en dicho intervalo.

c) En $(-\pi, 0)$, $f(x) = \cos x$, es continua.

Para que $f(x)$ sea continua en $[-\pi, 0]$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = f(-\pi) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

$f(-\pi) = \cos(-\pi) = -1 = \lim\limits_{x \to -\pi^+} f(x)$

$f(0) = -1$, pero $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \cos x = 1 \neq -1$

Por tanto, la función no es continua en $[-\pi, 0]$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2^{1/x}}$ es continua para todos los valores, excepto el 0; por tanto, f es continua en el intervalo $(-1, 0)$.

Veamos si lo es en el intervalo $[-1, 0]$:

$f(-1) = 2 = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

$f(0) = 0$, pero $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{1 - 2^{1/x}} = 1 \neq 0$

En consecuencia, f no es continua en $[-1, 0]$.

14 **La función $f(x) = \text{tg}\, x - x$ tiene un cero en $x = 0$. Por otro lado, $f(\pi) = -\pi < 0$ y $f(-\pi) = \pi > 0$. ¿Significa esto que $f(x)$ es continua en $[-\pi, \pi]$? Razona tu respuesta.**

El teorema de Bolzano afirma que si una función es continua en un intervalo cerrado y en sus extremos las imágenes tienen diferente signo, entonces la función tiene un cero en el intervalo abierto.

Pero si la función tiene un cero en $(-\pi, \pi)$, que es $x = 0$, esto no implica que sea continua en $[-\pi, \pi]$, aunque $f(\pi) < 0$ y $f(-\pi) > 0$.

Concretamente, esta función es discontinua en $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$, que son puntos de $[-\pi, \pi]$.

15 PAU **Enuncia el teorema de Bolzano. Calcula, con un error menor de una décima, una raíz positiva del polinomio $x^3 + x - 1$.**

$f(x) = x^3 + x - 1$ es una función polinómica, y por tanto, continua en su dominio. Puesto que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$, f tiene una raíz en el intervalo $[0, 1]$.

Como $f(0{,}6) = -0{,}184$ y $f(0{,}7) = 0{,}043$, $x = 0{,}6$ es una raíz positiva con un error menor de una décima.

Si pidieran la solución con una cifra decimal exacta deberíamos seguir y precisar con un error menor que la mitad de una décima.

Como $f(0{,}68) < 0$ y $f(0{,}69) > 0$, la solución con una cifra decimal exacta es $x = 0{,}7$.

16 **Demuestra que la función $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ tiene un cero en el intervalo $[1, 3]$.**

$f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ es una función polinómica, continua en $[1, 3]$.

$f(1) = -2 < 0$ y $f(3) = 12 > 0$, por lo que se cumplen las hipótesis del teorema de Bolzano. Existe un valor $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 0$.

17 **Dada la ecuación $ax^5 + bx^3 + cx + d = 0$, ¿podemos asegurar que existe, al menos, una solución real?**

$f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + d$ es una función polinómica, continua en $\mathbb{R}$.

Dado que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ son infinitos, pero de signo contrario, podemos deducir que forzosamente en algún punto la curva f corta el eje de abscisas ya que la función cambia de signo, existiendo por lo menos un cero de la función, es decir, un valor $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$.

18 **Demuestra que toda función polinómica de tercer grado tiene, como mínimo, una raíz real.**

Supongamos $a_3 > 0$, entonces:

$\lim\limits_{x \to -\infty} (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = +\infty$

Entonces es posible determinar dos números, a y b, $a < b$, tales que en el intervalo $[a, b]$ se cumpla que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Como una función polinómica es continua en cualquier intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, aplicando el teorema de Bolzano existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

19 PAU **Sea la función f cuyo dominio es $\mathbb{R}$, si $f(0) < 0$ y $f(3) > 0$, ¿podemos asegurar que en el intervalo $(0, 3)$ existe un cero de la función? Razona tu respuesta.**

No es posible afirmarlo, puesto que a partir de los datos dados en el enunciado no se conoce si f es continua en $[0, 3]$, y, en consecuencia, no estamos en condiciones de aplicar el teorema de Bolzano.

20 **Sea f una función definida en $[a, b]$, continua en $x = a$ y en $x = b$, y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. ¿Se puede aplicar a esta función el teorema de Bolzano?**

La continuidad de una función en los extremos de un intervalo $[a, b]$ no implica que la función sea continua en $[a, b]$, por lo que no estamos en condiciones de aplicar el teorema de Bolzano.

21 PAU **Justifica que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \text{sen}\, x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0, \pi]$. Calcula estos dos puntos.**

$g(x)$ es una función continua en $[0, \pi]$ y se cumple que $g(0) = 0$ y $g(\pi) = -2$.

Por tanto, en $[0, \pi]$, en $x = 0$ la función $g(x)$ se anula. Ahora se busca un punto interior del intervalo en que $g(x) > 0$:

$\frac{-2}{\pi}x + \text{sen}\, x > 0$, por ejemplo si $x = \frac{\pi}{6}$, se verifica que $\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} > 0$. Por el teorema de Bolzano, existe $c \in \left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$, donde $g(c) = 0$, $\frac{2}{\pi}x = \text{sen}\, x$ si $x = \frac{\pi}{2}$, luego $g(0) = 0$ y $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

22 PAU **Enuncia el teorema de Bolzano y determina si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raíz real negativa.**

$f(-5) = 524 > 0$ y $f(0) = -1 < 0$

Dado que la función es continua y $f(-5) \cdot f(0) < 0$, existe $-5 < c < 0$ tal que $f(c) = 0$.

23 PAU **Enuncia el teorema de Bolzano y utilízalo para demostrar que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.**

Construimos la función polinómica $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$

$f(0) = 1$ y $f(1) = -4$.

Dado que la función es continua y $f(0) \cdot f(1) < 0$, existe $0 < c < 1$ tal que $f(c) = 0$.

24 PAU **Sea f una función continua en $[-1, 1]$, donde $f(-1) = 5$ y $f(1) = 10$. Demuestra que existe algún número real, $c \in (-1, 1)$, tal que $f(c) = 7$.**

Construimos la función $h(x) = f(x) - 7$.

Esta función es continua en $[-1, 1]$, puesto que es una suma de funciones continuas.

$h(-1) = 5 - 7 < 0$

$h(1) = 10 - 7 > 0$

Por tanto, la función h cumple las hipótesis del teorema de Bolzano; luego existe al menos un $c \in (-1, 1)$ tal que $h(c) = 0$, esto es, $f(c) - 7 = 0$, es decir, $f(c) = 7$.

25 PAU **Demuestra que existe al menos un número real, x, para el que se verifica $\text{sen}\, x = x - 2$.**

La función $g(x) = \text{sen}\, x - x + 2$ es una función continua. Dado que $g(2) = 0{,}91$ y $g(3) = -0{,}86$, la función $g(x)$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[2, 3]$, por lo que existe al menos un valor, c, $2 < c < 3$, en el que $f(c) = 0$, es decir, para el que se cumple que $\text{sen}\, c = c - 2$.

26 PAU **Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1/x$ se cortan en un punto $x = 0$.**

Construimos la función $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$, y para $x > 0$, la función es continua.

Si $x = 1/2$, entonces $h(1/2) < 0$ y si $x = 1$, entonces $h(1) > 0$.

Aplicando Bolzano, existe un valor $c \in (1/2, 1)$ en que $h(c) = 0$, es decir, $e^x = \frac{1}{x}$.

27 PAU **Prueba que $x = \cos x$ tiene solución positiva.**

Sea $f(x) = \cos x - x$. Es una función continua en $\mathbb{R}$.

$f(0) = 1 > 0$ y $f(\pi/2) = -1 < 0$. Por tanto, en el intervalo $(0, \pi/2)$ existe, al menos, un valor en el que se anula la función $f(x)$, esto es $x = \cos x$

28 PAU **Demuestra que $x \cos x + \text{sen}\, x = 1$ tiene alguna solución real.**

Sea la función $f(x) = x \cos x + \text{sen}\, x - 1$.

Es continua en $\mathbb{R}$, pues es la suma de un producto de funciones continuas.

Además, $f(-\pi) = \pi - 1 > 0$, y $f(0) = -1 < 0$.

Por el teorema de Bolzano se sabe que existe al menos un valor $c \in (-\pi, 0)$, tal que $f(c) = 0$, esto es, $c \cos c + \text{sen}\, c - 1 = 0$, es decir, $c \cos c + \text{sen}\, c = 1$. Por tanto, c es solución de la ecuación.

29 PAU **Prueba que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene dos soluciones reales. Aproxímalas con una cifra decimal exacta.**

Sea la función $f(x) = x^3 - 2^x$.

Es una función continua, pues es una diferencia de funciones continuas.

$f(1) = -1$ y $f(2) = 4$, por lo que en el intervalo $[1, 2]$, f es continua y $f(1) \cdot f(2) < 0$. Entonces, por el teorema de Bolzano, existe al menos un valor c en $(1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Calculamos el signo de las imágenes de 1,1; 1,2; ...; 1,9. Observamos que:

$f(1{,}3) = -0{,}26$ y $f(1{,}4) = 0{,}10$, por lo que la función tiene al menos un cero en el intervalo $(1{,}3, 1{,}4)$.

Volvemos a subdividir el intervalo y se obtiene el cambio de signo en el intervalo $(1{,}37, 1{,}38)$, por lo que una solución de la ecuación $x^3 = 2^x$ con una cifra decimal exacta es 1,4.

Además, $f(9) = 217$ y $f(10) = -24$, por lo que f es continua en el intervalo $[9, 10]$ y $f(9) \cdot f(10) < 0$. Entonces, por el teorema de Bolzano, existe al menos un valor, c, en $(9, 10)$ tal que $f(0) = 0$.

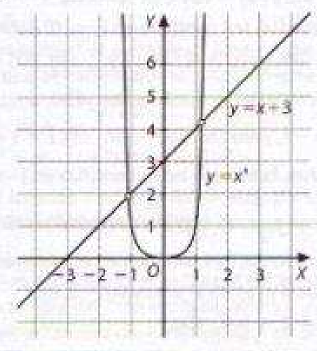
Procediendo de forma análoga a como se hizo en la solución anterior, se determina que $x = 9{,}9$ es una solución de la ecuación $x^3 = 2^x$ con una cifra decimal exacta.

30 **Sea la función $f(x) = x^4 - x - 3$.**

a) **Razona por qué su gráfica corta en dos puntos el eje X.**

b) **Averigua, con una cifra decimal exacta, para qué valor $c \in \mathbb{R}^+$ es $f(c) = 0$.**

a) Representamos las gráficas de las funciones $y = x^4$ e $y = x + 3$:



Se observa que se cortan en dos puntos; luego $x^4 - x - 3 = 0$ para dos valores reales de x. Por tanto, la gráfica de $f(x)$ corta en dos puntos al eje de abscisas.

b) $f(1) = -3 < 0$

$f(2) = 11 > 0$

Subdividimos el intervalo y el cambio de signo se produce en $(1{,}4, 1{,}5)$.

Volvemos a subdividir el intervalo y el cambio de signo se produce en $(1{,}45, 1{,}46)$, por lo que $f(c) = 0$ en $c = 1{,}5$, con una cifra decimal exacta.

PREGUNTA DE CLASE Nº 2 – LIMITES Y CONTINUIDAD

2º BTO C-T –IES TRASSIERRA - CÓRDOBA

Nombre: ____ Fecha: 19-10-2009

1.- Estudia la continuidad de la función siguiente en el intervalo [-2, 5]. Indica los tipos de discontinuidades si las hubiera:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & si \quad x \leq 0 \\ \ln(5-x) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

2.- ¿Qué valor debe tomar el parámetro *a* en la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & si \quad x \leq 0 \\ \ln(a-x) & si \quad x > 0 \end{cases}$ para que sea continua en [-2, 2]?